20 MAGGIO 2020

IV - IL CAMPO LIBERO GAUSSIANO CONTINUO

[Werner, Powell]

[Berestycki]

"GAUSSIAN FREE FIELD" = GFF

1 - RICHIAMI SUL GFF DISCRETO

- $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$, $\quad \Delta f(x) := \sum\limits_{\substack{y \sim x}} (f_y - f_x) = \sum\limits_{y \in \mathbb{Z}^d} \Delta_{xy} f_y$

PRIMI VICINI

$$\Delta_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{SE } y \sim x \\ -2d & \text{SE } y = 0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$D \subseteq \mathbb{Z}^d$ LIMITATO $\qquad \Delta_D = (\Delta_{xy})_{x,y \in D} \in \mathbb{R}^{D \times D}$

↳ LAPLACIANO DISCR. RISTRETTO A D

- $-\Delta_D$ È MATRICE SIMM. E DEF. > 0 $\rightsquigarrow$ $(-\Delta_D)^{-1} =: \frac{1}{2d} G_D$

FUNZIONE DI GREEN DISCR.

$$\Delta_D G_D = -(2d) I \iff \Delta_D G_D(x,y) = -(2d)\, \delta_{xy}$$

- RAPPRESENTAZ. "ESPLICITA"

PASS. AL. SEMPL. SU $\mathbb{Z}^d$ — TEMPO DI USCITA DA D

$$G_D(x,y) = \frac{1}{2d} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_x \left[S_k = y ,\ \tau_D > k \right]$$

$$= \frac{1}{2d} \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\tau_D - 1} \mathbb{1}_{\{S_k = y\}} \right]$$

DEFINIZIONE (GFF DISCRETO)

SIA $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ LIMITATO. SI DICE GFF DISCR. SU D (CON CONDIZ. AL BORDO NULLE) UN VETTORE ALEATORIO

$$H = (H_x)_{x \in D} \sim N\left(0, (-\Delta_D)^{-1}\right) = N\left(0, \frac{1}{2d} G_D\right)$$

CIOÈ UN VETTORE GAUSSIANO CENTRATO CON

$$\mathrm{Cov}\left[H_x, H_y\right] = \frac{1}{2d} G_D(x,y)$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ IL GFF HA DENSITÀ ESPLICITA

$$f_H\left(h = (h_x)_{x \in D}\right) = c \exp\left\{-\frac{1}{2} \overbrace{\langle h, (-\Delta_D) h \rangle}^{(h,h) \ (\text{PROD. SC.})}\right\}$$

$$= c \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum_{\substack{x,y \in \bar{D} \\ x \sim y}} (h_x - h_y)^2\right\}$$

DEFINIZIONE

SI DICE SPAZIO DI CAMERON-MARTIN DEL GFF DISCRETO SU D LO SPAZIO DI HILBERT $H_0^1 := \left(\mathbb{R}^D, (h,g) := \langle h, (-\Delta_D) g \rangle\right)$

- $\{h_i\}_{i=1,\dots,|D|}$ BASE ORTONORMALE DI H_0^1 $\left[(h_i, h_j) = \delta_{ij}\right]$
- $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ V.A. IID $N(0,1)$

ALLORA

$$H := \left(H_x := \sum_{i=1}^{|D|} Z_i \, h_i(x)\right)_{x \in D} \sim \text{GFF SU } D.$$

2. DAL GFF DISCRETO AL GFF CONTINUO

COME DEFINIRE UNA VERSIONE CONTINUA DEL GFF SU DOM. $D \subseteq \mathbb{R}^d$?

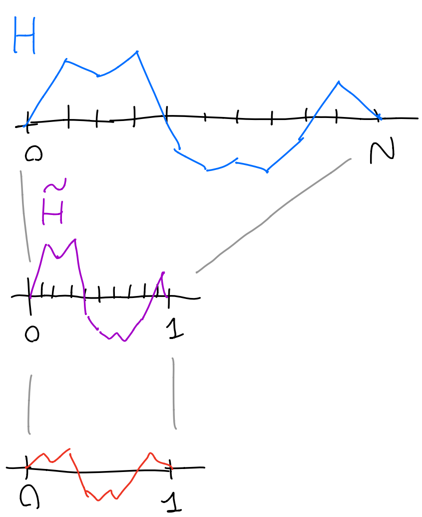
LIMITE DI SCALA: GFF CONTINUO = "LIMITE" DEL GFF DISCRETO RISCALATO.

CASO $d=1$

$\stackrel{d}{=} X_n - \frac{n}{N} X_N$ DOVE $X = (X_n)_{n \geq 0}$ È PASSI. AL. GAUSS.

$D = \{1, \dots, N-1\}$ $\quad H = (H_n)_{n \in D}$ GFF SU D = PONTE DELLA PASSI. AL. GAUSSIANA

$$\mathrm{Cov}\left[H_m, H_n\right] = \frac{m(N-n)}{N} \qquad (m<n)$$



$$\tilde{H} = \tilde{H}^{(N)} = \left(\tilde{H}_t := H_{\lfloor Nt \rfloor}\right)_{t \in (0,1)}$$

$$\mathrm{Cov}\left[\tilde{H}_s, \tilde{H}_t\right] \simeq N\, s(1-t) \qquad (N \to \infty)$$

$$\hat{H} = \hat{H}^{(N)} = \left(\hat{H}_t := \frac{\tilde{H}_t}{\sqrt{N}} = \frac{H_{\lfloor Nt \rfloor}}{\sqrt{N}}\right)_{t \in (0,1)}$$

$$\mathrm{Cov}\left[\hat{H}_s, \hat{H}_t\right] \simeq s(1-t)$$

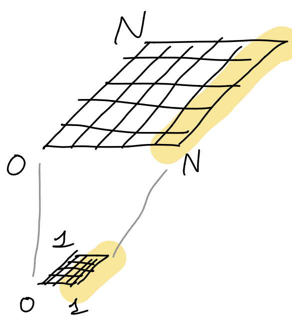
PROPOSIZIONE

IL GFF SU D RISCALATO $\hat{H} = \hat{H}^{(N)} = \left(\hat{H}_t^{(N)}\right)_{t \in (0,1)}$ CONVERGE IN LEGGE PER $N \to \infty$ VERSO $\underbrace{\mathcal{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \in (0,1)}}_{\text{PONTE BROWNIANO}}$ PROC. GAUSS. CENTRATO

$$\mathrm{Cov}\left[\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_t\right] = s(1-t) \qquad \text{SE } s<t$$

PONTE BROWNIANO $\begin{cases} (B_t)_{t \in [0,1]} \text{ CONDIZ. A } B_1 = 0 \\ (B_t - tB_1)_{t \in [0,1]} \end{cases}$

CASO $d \geq 2$



$D = \{1, \dots, N-1\}^d$ $\quad$ $H = (H_n)_{n \in D}$ GFF DISC. SU D

$\mathrm{Cov}[H_m, H_n] = ?$ NON ESPLICITA!

FATTO

$\forall\, x, y \in (0,1)^d$: $\quad \mathrm{Cov}\Big[\overset{\tilde H_x}{\overset{\shortparallel}{H_{\lfloor Nx \rfloor}}}, \overset{\tilde H_y}{\overset{\shortparallel}{H_{\lfloor Ny \rfloor}}}\Big] \sim N^{2-d}\, \mathcal{G}(x,y) \quad (N \to \infty)$

CON $\mathcal{G}(x,y) < \infty \ \forall\, x \neq y$, MA $\mathcal{G}(x,x) = \infty$!

EURISTICA: $\mathrm{Cov}[H_m, H_n] = \frac{1}{2d} G_D(m,n) = \frac{1}{2d} E_m\Big[\sum_{k=0}^{\tau_D - 1} \mathbb{1}_{\{S_k = n\}}\Big]$

$= \cancel{\frac{1}{2d}} \cdot$ TEMPO MEDIO PASSATO DA S IN n, PRIMA DI ABBANDONARE D

$\simeq \dfrac{E[\tau_D]}{|D|} \simeq \dfrac{N^2}{N^d} = N^{2-d}$

CONGETTURA

IL GFF DISCR. RISCALATO $\hat H^{(N)} = \left(\hat H^{(N)}_x = \dfrac{H_{\lfloor Nx \rfloor}}{N^{1-d/2}}\right)_{x \in (0,1)^d}$

CONVERGE IN LEGGE VERSO $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_x)_{x \in (0,1)^d}$ PROC. GAUSS.

CENTRATO CON $\mathrm{Cov}[\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y] = \mathcal{G}(x,y)$.

PROBLEMA: SI DOVREBBE AVERE $\mathrm{Var}[\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_x] = \mathcal{G}(x,x) = \infty$!?

FATTO: PER $N \to \infty$ LE TRAIETTORIE $x \mapsto \hat{H}^{(N)}_x$, PER $x \in (0,1)^d$, SONO MOLTO IRREGOLARI! INFATTI

LEGGE CONDIZ. DI $\hat{H}^{(N)}_x$ SAPENDO $\left(\hat{H}^{(N)}_y\right)_{y = x \pm \frac{1}{N} e_i} = (h_y)$
È $N\left(\bar{h}, \frac{1}{2d} N^{d-2}\right)$

DUNQUE NON È RAGIONEVOLE SPERARE CHE LE TRAIETT. $x \mapsto \hat{H}^{(N)}_x$ CONVERGANO A FUNZIONI DI $x \in (0,1)^d$.

"SOLUZIONE": DOBBIAMO GUARDARE ALLE TRAIETT. COME DISTRIBUZ. SU $(0,1)^d$, OSSIA NON POSSO SPERARE CHE $\hat{H}^{(N)}_x$ CONVERGA "PUNTUALMENTE" IN x, MA SOLO "INTEGRANDO" SU x. DUNQUE SE FISSO $\varphi : (0,1)^d \to \mathbb{R}$ "FUNZIONE TEST" REGOLARE, POSSO SPERARE CHE

$$\hat{H}^{(N)}_\varphi := \int_{(0,1)^d} \hat{H}^{(N)}_x \, \varphi(x) \, dx \xrightarrow[(N \to \infty)]{d} \mathcal{H}_\varphi \quad \text{V.A. LIMITE.}$$

$$\parallel$$

$$\text{"} \int_{(0,1)^d} \mathcal{H}_x \, \varphi(x) \, dx \text{"} \quad \text{MORALMENTE}$$

VA BENE ANCHE $\varphi(x) = \mathbb{1}_A(x)$ CON $A \subseteq (0,1)^d$ APERTO REGOLARE

PER CONCLUDERE: DEFINIREMO IL "GFF CONTINUO $\mathcal{H}$ SU $(0,1)^d$", O PIÙ IN GEN. SU UN APERTO $D \subseteq \mathbb{R}^d$, COME UN PROC. GAUSS.

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{D}}$$

INDICIZZATO DA UNA CLASSE $\mathcal{D}$ DI "FUNZIONI TEST" $\varphi : D \to \mathbb{R}$, DEF. COME PROC. GAUSS. CENTRATO CON

(𝄞) $\mathrm{Cov}[\mathcal{H}_\varphi, \mathcal{H}_\psi] = \int_{D \times D} \varphi(x)\,\psi(y)\,\mathcal{G}(x,y)\,dx\,dy < \infty$

CI RESTA DA DEFINIRE E STUDIARE $\mathcal{G}(x,y)$ [FUNZ. DI GREEN CONTINUA]

E DA MOSTRARE CHE (𝄞) È SIMM. E DEF. > 0.

TEOREMA (GFF CONTINUO COME LIMITE DEL GFF DISCRETO RISC.)

IL GFF DISCR. RISCALATO $\hat{H}^{(N)} = \left(\hat{H}^{(N)}_\varphi\right)_{\varphi \in \mathcal{D}}$,

CONVERGE IN LEGGE VERSO $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{D}}$ PROC. GAUSS.

CENTRATO CON $\mathrm{Cov}[\mathcal{H}_\varphi, \mathcal{H}_\psi] = \int_{D \times D} \varphi(x)\,\psi(y)\,\mathcal{G}(x,y)\,dx\,dy$

NOI SCEGLIEREMO $\mathcal{D} = C_c^\infty(D) = \{\varphi : D \to \mathbb{R} \;\; C^\infty \text{ A SUPP. COMP.}\}$.

3. LA FUNZIONE DI GREEN CONTINUA ($d \geq 2$)

D'ORA IN AVANTI SCRIVEREMO G INVECE DI $\mathcal{G}$ E H INVECE DI $\mathcal{H}$

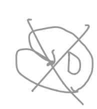
PER FUNZ. DI GREEN E GFF CONTINUI (NON PARLEREMO PIÙ DEL CASO DISCR.)

SIA $D \subseteq \mathbb{R}^d$ APERTO, PER SEMPLICITÀ LIMITATO E CONNESSO,

CON FRONTIERA ∂D "NON CATTIVA"

LEGGE DEL MB CHE PARTE DA x.

$[\forall x \in \partial D : \inf\{t > 0 : B_t \notin D\} = 0 \quad \mathbb{P}_x\text{-q.c.}]$



LAPLACIANO: SE $F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ DI CLASSE C^2, $F \in C^2$, $\Delta F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$$\Delta F := \operatorname{div}(\operatorname{grad}(F)) := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F$$

RESTRINGIAMOCI A FUNZIONI $F \in \mathcal{D} := C_c^\infty(D) = \{F: D \to \mathbb{R}$ C^∞ A SUPP. COMP.$\}$

ALLORA $\Delta_D : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ È UN OPERATORE (LINEARE) DIFFERENZIALE

$$\Delta_D F(x) = \Delta F(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F(x)$$

COME NEL CASO DISCRETO, CERCHIAMO L'INVERSO $G_D := (-\Delta_D)^{-1}$.

ESSO È UN OPERATORE (LINEARE) INTEGRALE:

$$G_D f(x) = \int_D G_D(x,y) f(y)\, dy$$

FUNZIONE DI GREEN DI D.

TEOREMA (FUNZ. DI GREEN)

SIA $D \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO COME SOPRA. ESISTE UNA (UNICA) FUNZIONE SIMMETRICA $G_D : \bar{D} \times \bar{D} \to [0, \infty]$ CON LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- PER $x \neq y$ SI HA $G_D(x,y) < \infty$ E $G_D(x,y)$ È C^∞ PER $(x,y) \in D \times D \setminus \{x=y\}$.
- PER $x = y$ SI HA $G_D(x,x) = \infty$

- PER OGNI $f \in C_c^\infty(D)$, POSSIAMO DEF.

$$F(x) := G_D f(x) := \int_D G_D(x,y) f(y)\, dy$$

E SI HA CHE $F \in C^0(\bar{D}) \cap C^\infty(D)$, INOLTRE $F(x) = 0 \ \forall x \in \partial D$, E INFINE

$$(\star) \qquad (-\Delta F)(x) = f(x) \quad \forall x \in D$$

INOLTRE TALE FUNZ. SODDISFA

PER $y \in D$, PER $x \to y$

$$G_D(x,y) \sim \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|} & \text{SE } d=2 \\ \frac{1}{|\partial B(0,1)|} \frac{1}{|x-y|^{d-2}} & \text{SE } d \geq 3. \end{cases}$$

DIM. (SKETCH) DEF. $F(x) := G_D f(x) := \frac{1}{2} \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_D} f(B_t)\, dt \right]$

DOVE $B = (B_t)_{t \geq 0}$ RISP. A $\mathbb{P}_x$ È M.B. CHE PARTE DA x

$\tau_D := \inf \{ t \geq 0 : B_t \notin D \}$.

SI VERIFICA CHE $\underbrace{F \in C^0(\bar{D}) \text{ E } F \equiv 0 \text{ SU } \partial D}_{\text{(IPOTESI DI REGOLARITÀ SU } \partial D)}$

INFINE, PER MOSTRARE CHE $-\Delta F = f$ BASTA MOSTRARE CHE

$$\underbrace{\bar{F}_\varepsilon(x)}_{:= \int_{\partial B(x,\varepsilon)} F(y)\, d\sigma(y)} - F(x) = -\frac{\varepsilon^2}{2d} f(x) + o(\varepsilon^2) \qquad \text{PER } \varepsilon \downarrow 0$$

EJERCIZIO (TAYLOR): $\forall F \in C^2$ SI HA $\overline{F}_\varepsilon(x) - F(x) = \frac{\varepsilon^2}{2d} \Delta F(x) + o(\varepsilon^2)$

INFINE SIA $x \in D$, SIA $\varepsilon > 0$ PICCOLO AFFINCHÉ $B(x,\varepsilon) \subseteq D$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_{B(x,\varepsilon)}} f(B_t)\, dt + \int_{\tau_{B(x,\varepsilon)}}^{\tau_D} f(B_t)\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(f(x) + o(1) \right) \boxed{\mathbb{E}_x \left[\tau_{B(x,\varepsilon)} \right]} + \frac{1}{2} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} d\sigma(y)\, \mathbb{E}_y \left[\int_0^{\tau_D} f(B_t)\, dt \right]$$

$(M_t := |B_t|^2 - dt)_{t \geq 0}$ È MART.

$$= \frac{1}{2} \left(f(x) + o(1) \right) \boxed{\frac{\varepsilon^2}{d}} + \underbrace{\int_{\partial B(x,\varepsilon)} d\sigma(y)\, F(y)}_{\overline{F}_\varepsilon(x)}$$

4. IL GFF CONTINUO COME PROC. STOC.

FISSIAMO $D \subseteq \mathbb{R}^d$ APERTO, LIMITATO, CONNESSO, CON ∂D RAGIONEVOLE.

SIA $G_D : \overline{D} \times \overline{D} \to [0, \infty]$ FUNZIONE DI GREEN (COME SOPRA)

DATA $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ CONTINUA DEFINIAMO $G_D f : \overline{D} \to \mathbb{R}$

$$G_D f(x) := \int_D G_D(x,y)\, f(y)\, dy$$

INFINE DATE $f, g : \overline{D} \to \mathbb{R}$ CONTINUE DEFINIAMO

$$G_D(f,g) := \int_D f(x)\, G_D(x,y)\, g(y)\, dx\, dy$$

SIA $\mathcal{D} := \{ f : D \to \mathbb{R},\ f \in C_c^\infty(D) \}$.

DEFINIZIONE (GFF CONTINUO)

SI DICE GFF (CONTINUO) SU D UN PROC. STOC. $H = (H_f)_{f \in \mathcal{D}}$ T.C. H È PROC. GAUSS. CENTRATO CON

$$\mathrm{Cov}[H_f, H_g] := G_D(f,g) = \int_{D \times D} f(x)\, G_D(x,y)\, g(y)\, dx\, dy$$

AFFINCHÉ LA DEF. SIA BEN POSTA DEVO VERIFICARE CHE $G_D(f,g)$ È SIMMETRICO (OK) E DEF. > 0, OSSIA

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall f_1, \dots, f_k \in \mathcal{D}$ DISTINTI:

LA MATRICE $\left(K_{ij} := G_D(f_i, f_j)\right)_{1 \le i,j \le k}$ È DEF. > 0

CIOÈ $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, POSTO $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$\langle \alpha, K\alpha \rangle = \underbrace{\sum_{i,j=1}^{k} K_{ij}\, \alpha_i \alpha_j}_{\sum_{i,j=1}^{k} \alpha_i \alpha_j \int_{D \times D} f_i(x)\, f_j(y)\, G_D(x,y)\, dx\, dy} \geqslant 0 \quad [E > 0 \text{ SE } \alpha \neq 0].$$

$$= \underbrace{\int_{D \times D} f(x)\, G_D(x,y)\, f(y)\, dx\, dy}_{G_D(f,f)} \overset{(?)}{\geqslant} 0$$

DOVE $f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x)$

RESTA DA MOSTRARE CHE $G_D(f,f) \geqslant 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}$, E CHE SE $f \not\equiv 0$ $G_D(f,f) > 0$.

SIA $F(x) := (G_D f)(x) = \int_D G_D(x,y) f(y)\, dy$

SAPPIAMO CHE $-\Delta F = f$ SU D. ALLORA

$$G_D(f,f) = \int_{D\times D} f(x)\, G_D(x,y)\, f(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_D \underbrace{f(x)}_{(-\Delta F)} \underbrace{(G_D f)}_{F}(x)\, dx$$

[INTEGR. PER PARTI (GAUSS-GREEN) + $F \equiv 0$ SU ∂D]

$$= \int_D F(x) (-\Delta F)(x)\, dx$$

$$= \int_D \nabla F(x) \cdot \nabla F(x)\, dx = \int_D |\nabla F(x)|^2\, dx \geq 0.$$

INOLTRE $G_D(f,f) = 0 \Rightarrow |\nabla F(x)| \equiv 0 \Rightarrow F \equiv$ COST.

$$\Rightarrow F \equiv 0 \Rightarrow f = -\Delta F \equiv 0.$$

RIASSUMENDO: $G_D(f,g)$ È SIMM. E DEF. > 0, DUNQUE È UNA COVARIANZA LEGITTIMA! ALLORA IL GFF CONTINUO È BEN DEFINITO.

$\boxed{\text{OSS.}}$ "MORALMENTE" "$H_f = \int_D H_x f(x)\, dx$"

(MA H_x NON È BEN DEFINITO)

ESERCIZIO: FISSIAMO $f, g \in \mathcal{D}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ALLORA Q.C. SI HA

$$\boxtimes \qquad H_{\alpha f + \beta g} = \alpha H_f + \beta H_g$$

INFATTI BASTA NOTARE CHE $\mathrm{Var}\left[H_{\alpha f+\beta g} - (\alpha H_f + \beta H_g)\right] = 0$.

ATTENZIONE: IN PRINCIPIO L'INSIEME DEGLI $\omega \in \Omega$ DI PROB. 1 PER CUI VALE $\boxtimes$ DIPENDE DA f, g, α, β.

DOMANDA: È POSSIBILE COSTRUIRE IL GFF CONTINUO (SCEGLIERNE UNA VERSIONE) IN MODO CHE, Q.C., VALGA $\boxtimes$ $\forall f, g \in \mathcal{D}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$? OSSIA IN MODO CHE, Q.C., H_f È UNA FUNZIONE LINEARE DI f?

RISPOSTA: SÌ, SE f VARIA IN $\mathcal{D} = C_c^\infty(D)$.

ANZI, MOSTREREMO DI PIÙ: Q.C., $f \mapsto H_f$ NON SOLO È LINEARE SU $\mathcal{D}$, MA È ANCHE CONTINUA RISP. ALLA TOPOLOGIA NATURALE DI $\mathcal{D}$ (CHE DEFINIREMO).

MOSTREREMO DUNQUE CHE, Q.C., IL GFF CONTINUO È UNA DISTRIBUZIONE (SCHWARTZ) SU D.